

بهینه سازی چینش حسگرها در آرایه خطی تنک به منظور بهبود درجه آزادی

محمد ابراهیمی^۱، سید محمود مدرس هاشمی^۲ و احسان یزدیان^۳

^۱دانشگاه صنعتی اصفهان، mohammad_ebrahimi@iut.ac.ir

^۲دانشگاه صنعتی اصفهان، Modarres@cc.iut.ac.ir

چکیده - در این مقاله به فرمول بندی آرایه بهینه خطی تنک از نقطه نظر درجه آزادی در جهت یابی منابع پرداخته می شود. درجه آزادی آرایه به معنای تعداد اهداف قابل کشف در آرایه است و افزایش آن به بهبود دقت جهت یابی منجر می شود. درجه آزادی آرایه وابسته به چیدمان آرایه است، به عبارت دیگر به ازای جایگشت‌های مختلف چیدمان عناصر، درجه آزادی های متفاوتی خواهیم داشت. در این مقاله ضمن فرمول بندی مساله درجه آزادی راه حلی برای یافتن چیدمان آرایه با بیشینه درجه آزادی ارائه شده است. در نهایت هندسه بهینه با هندسه های تعریف شده در چند سال اخیر مقایسه شده است. نتایج حل مساله نشان از بهبود درجه آزادی به ازای تعداد حسگرهای یکسان و یا کم شدن تعداد حسگر به ازای درجه آزادی ثابت نسبت به سایر روشها دارد.

کلید واژه- آرایه تنک خطی، باینری خطی، درجه آزادی، جهت یابی منابع.

از دو زیر ساختار دارای M و N حسگر تشکیل شده است، که M و N نسبت به یکدیگر اول هستند. درجه آزادی آرایه در این ساختار از مرتبه MN است.

پس از معرفی دو ساختار اخیر ساختارهای متعدد دیگری برگرفته از این دو ساختار ارائه شدند. در [۹-۱۴] ساختارهایی مبتنی بر Coprime جهت بالا بردن درجه آزادی معرفی شده است. در [۱۰] نیز نویسندگان بر مبنای ساختار Nested به معرفی ساختاری برای بهبود درجه آزادی پرداخته اند. نهایتاً در مرجع [۱۱] به معرفی ساختاری مبتنی بر Coprime جهت افزایش درجه آزادی پرداخته شده است و نشان داده شده است که ساختار فوق از درجه آزادی بالاتری نسبت به سایر روشها برخوردار است.

در هیچ یک از ساختارهای معرفی شده مساله چینش بهینه به منظور بیشینه کردن درجه آزادی آرایه که به بهبود دقت جهت یابی نیز منجر می شود، به عنوان یک مساله ریاضی فرمول بندی نشده است. در این مقاله ابتدا به فرمول بندی مساله جهت یابی بر مبنای مدل خود آرایه تفاضلی پرداخته می شود، سپس ارتباط درجه آزادی آرایه با هندسه آرایه بیان می گردد. پس از آن به فرمول بندی چینش بهینه پرداخته شده و در نهایت روش حل مساله مرور می گردد. در نهایت نیز درجه آزادی آرایه بهینه با ساختارهای معرفی شده مقایسه می شود.

۲- جهت یابی منابع به کمک مفهوم خود آرایه تفاضلی

۱- مقدمه

جهت یابی منابع به کمک آرایه ای از حسگرها در سال های اخیر از مباحث جذاب در حوزه پردازش سیگنالهای راداری و سوناری بوده است. الگوریتم های مختلفی برای جهت یابی منابع ارائه شده است. از مهمترین الگوریتم ها در این حوزه الگوریتم MUSIC [۱] می باشد. این الگوریتم مبتنی بر تشکیل زیرفضای نویز و هدف و تعامد بین این دو زیرفضا بنا شده است. در آرایه خطی یکنواخت به کمک N حسگر قادر به جهت یابی حداکثر $N - 1$ هدف می باشیم. به تعداد اهداف قابل کشف توسط آرایه اصطلاحاً درجه آزادی (DOF) آرایه اطلاق می شود. استخراج درجه آزادی بیشینه و متناسب با آن هندسه مربوطه به کمک روشهای جستجوی کامپیوتری از دیرباز مورد توجه بوده است [۲-۵]. در [۶] به کمک تشکیل خود آرایه تفاضلی به توسعه آرایه و افزایش تعداد اهداف پرداخته شده است.

در [۷] و سپس [۱۵] نویسندگان به معرفی ساختاری تحت عنوان Nested پرداخته اند به کمک ساختار خود آرایه تفاضلی درجه آزادی آرایه با N حسگر در ساختار معرفی شده از مرتبه N^2 می باشد. در مرجع [۷] به ازای برخی از درجات آزادی ساختار هندسه بهینه Nested معرفی شده است. در [۸] به معرفی ساختار Coprime پرداخته شده است. در ساختار Coprime فاصله حسگرها از یکدیگر بیشتر بوده و لذا اثرات تزویج متقابل حسگرها کمتر است. این ساختار

نمایش داده شده است. نقاط توپر بیانگر وجود حسگر در آرایه خود تفاضلی و نقاط ضربدر بیانگر عدم وجود حسگر می باشد. همانطور که ملاحظه می شود، طول بزرگترین قسمت پیوسته در یکی از آرایه ها ۲۳ و در دیگری ۲۷ می باشد. لذا درجه آزادی آرایه وابسته به چیدمان آرایه است.



شکل ۱: مقایسه دو آرایه از نقطه نظر درجه آزادی (الف و ب)

۲- فرمول بندی آرایه بهینه

با توجه به آنچه ذکر شد، آرایه بهینه از نقطه نظر درجه آزادی آرایه ای است که به ازای تعداد حسگر مشخص بزرگترین قسمت پیوسته را داشته باشد. دنباله a_n وابسته به چنین آرایه ای پاسخ مساله بهینه سازی زیر است.

$$a_{\text{optimum}} = \text{argmax}[a_n * a_{-n}] \quad (7)$$

$$s.t. \quad \sum_i a_i = N$$

در معادله (۷) عملگر $[\cdot]$ بیانگر بزرگترین قسمت پیوسته دنباله است. فرمول بندی فوق نامنوس و غیرخطی است. اگر جستجو را به آرایه های RMRA (Restricted Minimum Redundancy Array) [۱۲] که در آنها طول بزرگترین قسمت پیوسته (DOF) برابر طول دنباله c_n است محدود کنیم، آنگاه مساله (۷) با مساله (۸) معادل است.

$$a_{\text{optimum}} = \text{argmax}[c_n] \quad , c_n = a_n * a_{-n} \quad (8)$$

$$s.t. \quad \sum_i a_i = N \quad , c_n > 0 \quad \forall n = -(c_n - 1)/2, \dots, (c_n - 1)/2$$

عملگر $[\cdot]$ بیانگر طول دنباله است. مساله (۸) بیان می کند در آرایه بهینه با تعداد حسگر مشخص حاصل کانونولوشن دنباله آرایه با خودش در تمام تاخیرها بایستی مثبت شود. مساله فوق همچنان یک مساله غیرخطی است. لذا با رویکرد جدیدی به فرمول بندی مساله می پردازیم. در این رویکرد درجه آزادی را معلوم فرض می کنیم و به حداقل سازی تعداد حسگر می پردازیم. با توجه به تقارن زوج خروجی کانونولوشن $a_n * a_{-n}$ می توان قید را روی مقادیر مثبت n قرار داد. همچنین درجه آزادی آرایه برابر $|c_n|$ می باشد. با این توصیف مساله (۸) بصورت مساله (۹) بازنویسی می شود. با فرض $M = (DOF + 1)/2$ داریم.

N حسگر را روی یک خط راست در نظر بگیرید. با فرض آنکه بردار سیگنال ارسالی توسط K هدف $x(t)$ باشد، بردار سیگنال دریافتی توسط تمام حسگرها بصورت معادله (۱) می باشد [۶].

$$y(t) = Ax(t) + n(t) \quad t=0,1,2,\dots \quad (1)$$

$n(t)$ بیانگر نویز جمع شونده بوده و بردار سیگنال ارسالی توسط اهداف بصورت $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_K(t)]$ ، ماتریس A به صورت زیر تعریف می شود.

$$A = [a(\theta_1) \ a(\theta_2) \ \dots \ a(\theta_K)] \quad (2)$$

$a(\theta)$ بیانگر بردار هدایت آرایه بوده و بصورت زیر تعریف می شود.

$$a(\theta) = \left[1 \ e^{-j2\pi\frac{d_1}{\lambda}\sin(\theta)} \ \dots \ e^{-j2\pi\frac{d_N}{\lambda}\sin(\theta)} \right]^T \quad (3)$$

در معادله (۳) d_i فاصله حسگر i ام از حسگر اول و λ طول موج سیگنال دریافتی است. در روش های مبتنی بر زیرفضا به کمک تجزیه ماتریس کواریانس سیگنال دریافتی بصورت معادله (۴) جهات منابع استخراج می شوند.

$$R_y = AR_x A^H + R_n \quad (4)$$

در معادله بالا R_y ، R_x و R_n به ترتیب ماتریس های همبستگی سیگنال دریافتی، سیگنال اهداف و نویز می باشد. با فرض نا همبسته بودن سیگنال اهداف بر اساس مرجع [۶] مدل خود آرایه تفاضلی سیگنال دریافتی بصورت معادله (۵) است:

$$r = \text{vec}(R_y) = (A^* \odot A) \text{diag}(R_x) + \sigma^2 i \quad (5)$$

$\text{diag}(R_x)$ برداری شامل عناصر روی قطر اصلی ماتریس R_x است، عملگر \odot بیانگر ضرب Khatri-Rao دو ماتریس است. σ^2 واریانس نمونه های نویز و $\text{vec}()$ عملگری است که ستونهای ماتریس را زیر هم قرار می دهد، همچنین $i = \text{vec}(I)$.

در آرایه تنک خطی S فاصله حسگرها بصورت ضریبی از $\lambda/2$ است. دنباله a_n وابسته به S را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$a_i = \begin{cases} 0 & i \notin S \\ 1 & i \in S \end{cases} \quad (6)$$

در واقع دنباله a_i بیانگر محل حسگرها در آرایه S می باشد و لذا می توان ثابت نمود که محل حسگرها در آرایه خود تفاضلی توسط عناصر غیر صفر $c_n = a_n * a_{-n}$ مشخص می شود [۷] که در آن عملگر $*$ بیانگر کانونولوشن است. درجه آزادی آرایه بنا به تعریف طول بزرگترین قسمت پیوسته دنباله c_n می باشد [۷]. منظور از قسمت پیوسته خود آرایه تفاضلی زیر مجموعه ای از عناصر c_n است که اعضای متوالی آن یک واحد اختلاف داشته باشند، و زیر مجموعه فاقد صفر باشد.

در شکل (۱) دو آرایه با تعداد حسگر یکسان یعنی ۶ عدد با چینش های مختلف نمایش داده شده اند. خود آرایه تفاضلی مرتبط نیز

۳- مقایسه با ساختارهای زیربهمینه

در این بخش به مقایسه ساختار بهمینه با سایر ساختارهای معرفی شده از نقطه نظر بهبود در کاهش تعداد حسگر در رسیدن به درجه آزادی مشخص و بهبود دقت جهت یابی می پردازیم. نکته ای که بایستی به آن توجه داشت آنست که در روش فوق به ازای هر درجه آزادی ساختار بهمینه ای ارائه می گردد. در حالی که در ساختارهای معرفی شده پیشین به ازای هر درجه آزادی ساختار بهمینه و یا شبه بهمینه ای وجود ندارد. ساختار آرایه coprime بر اساس ساختار Complementary Coprime Array پیشنهادی در مرجع [۱۱] که به تازگی منتشر شده، صورت گرفته است.

در جدول (۲) همانطور که مشاهده می کنیم، به ازای درجه آزادی یکسان تعداد حسگرهای استفاده شده در آرایه Nested, Coprime و بهمینه استخراج شده است. همانطور که در جدول (۲) مشاهده می شود در چینش Coprime و Nested به ازای برخی از درجات آزادی ساختاری وجود ندارد. این موضوع در جدول با حرف N نمایش داده شده است.

جدول (۲) مقایسه درجه آزادی آرایه های مختلف

DOF array type	۳۱	۳۳	۳۹	۵۷	۷۱	۸۳	۱۱۱	۱۲۷
coprime	N	۸	N.	۱۱	۱۳	N.	N.	۱۶
Nested	۷	N	8	N	۱۲	۱۲	۱۴	۱۵
Proposed	۷	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۳	۱۴

در شبیه سازی دیگری مقدار باند کرامر رانو مربوط به تخمین زاویه ورود که در [۱۳] استخراج شده است برای آرایه شامل ۱۰ حسگر با چینش های گوناگون ذکر شده در جدول (۱) مقایسه شده است. در شکل (۳) مقدار باند مذکور در زاویه ۱۰- درجه به ازای نسبت های متفاوت سیگنال به نویز مقایسه شده است. همانگونه که شکل نشان می دهد دقت جهت یابی چینش بهمینه از سایر چینش ها بهتر است.

$$\min \sum_{i=1}^M a_i \quad (9)$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^M a_i a_{i+n} > 0 \quad \forall n = 0, \dots, M-1$$

مساله (۹) یک مساله باینری غیرخطی است که در حالت کلی به روش جستجوی کل فضا حل می شود. در اینجا با یک تغییر متغیر به صورت ابتکاری مساله را به یک مساله خطی ولی با ابعاد بزرگتر تبدیل می کنیم. می توان با تعریف متغیر کمکی وابسته $z_{i,i+k} = a_i a_{i+k}$ و تعریف قیدهای جدید مساله را به یک مساله باینری خطی به صورت مساله بهمینه سازی (۱۰) تبدیل کرد.

$$\min \sum_{i=1}^M a_i$$

$$s.t. \quad z_{i,i+k} \leq a_i$$

$$z_{i,i+k} \leq a_{i+k}$$

$$z_{i,i+k} \geq a_i + a_{i+k} - 1$$

$$i = 1, \dots, M, \forall k = 0, \dots, M-i$$

$$\sum_{i=1}^{M-k} z_{i,i+k} > 0, \quad \forall k = 0, \dots, M-1 \quad (10)$$

به راحتی می توان ثابت کرد که پاسخ بهمینه مساله (۹) در قیود مساله (۱۰) صدق می کند و برعکس، و لذا دو مساله معادل یکدیگرند. در مساله (۹) تعداد متغیرها و قیدها برابر M می باشد. در مساله (۱۰) تعداد متغیرها برابر $M + \frac{M(M+1)}{2}$ و تعداد قیدهای مساله بهمینه سازی برابر $M^2 + M + \frac{M(M+1)}{2}$ می باشد. مزیت مدل سازی مساله بصورت (۱۰) آنست که این دسته مسائل در قالب مساله باینری خطی می باشند. ما این مسئله را به کمک الگوریتم سیمپلکس و روش کران و شاخه حل می کنیم. این الگوریتم به ازای مقادیر مختلف درجه آزادی پاسخ بهمینه ای دارد. بعنوان مثال اگر برای درجه آزادی ۲۷ الگوریتم اجرا شود نتیجه حاصله ۶ حسگر با چیدمان شکل (۲) می باشد.



شکل ۲: چینش بهمینه ۶ المان از نقطه نظر درجه آزادی

همچنین اگر چیدمان آرایه ای با ۱۰ حسگر را در نظر بگیریم نتیجه برای روش های Coprime, Nested و بهمینه در جدول (۱) نشان داده شده است.

جدول (۱) چینش ۱۰ حسگر با هندسه های مختلف

هندسه آرایه	نوع چینش
$S = \{1,2,3,4,5,6,12,18,24,30\}$	Nested
$S = \{0,1,3,6,13,20,27,31,35,36\}$	Optimum
$S = \{0,3,5,6,9,10,12,15,20,25\}$	coprime

بالای شمارش نمی تواند به پاسخ مناسب دست پیدا کند. نتایج به طور خلاصه در جدول ذکر شده است.

جدول (۳) مقایسه زمان اجرای الگوریتم به کمک روش پیشنهادی و روش رایج

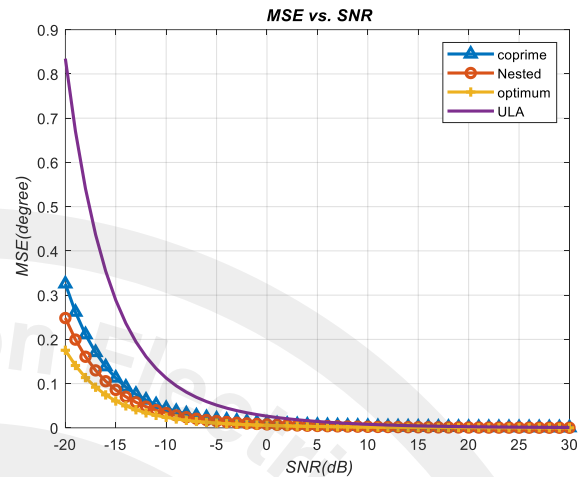
	۴۱	۱۰۱
روش پیشنهادی	۵. ثانیه	۳۳۷ ثانیه جهت دستیابی به ۲۰ حسگر
جستجوی کل فضا	۱۵ ثانیه	غیر قابل دستیابی

۴- نتیجه گیری

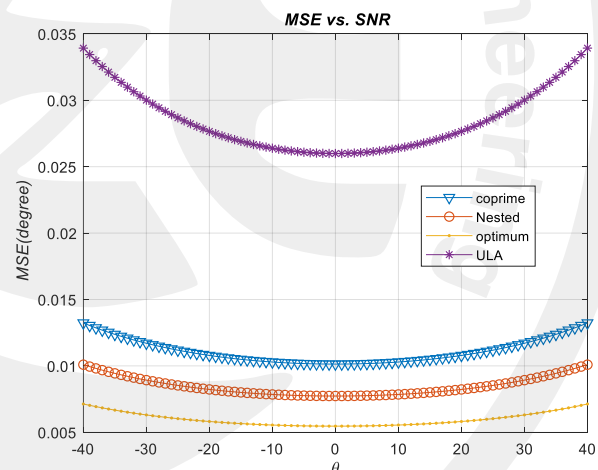
در این مقاله به فرمول بندی ریاضی چینش بهینه آرایه خطی تنک از نقطه نظر درجه آزادی پرداخته شد. مساله بصورت یک مدل مساله بهینه سازی باینری غیر خطی استخراج شد و سپس با یک روش ابتکاری مساله خطی گردیده و با روش های مرسوم حل چنین مسائلی حل شد. حجم محاسبات حل مساله از حجم جستجوی کل فضا بسیار کمتر است. مقایسه ساختار بهینه مطرح شده با سایر ساختارهای معروف نشان از بهبود درجه آزادی با تعداد حسگر مشخص دارد. همچنین در ساختار اخیر قادر به دستیابی به هر درجه آزادی با حداقل تعداد حسگر هستیم، در حالی که در روش های پیشین به ازای هر درجه آزادی، امکان یافتن چیدمان میسر نبود. علاوه بر این، نشان داده شد که آرایه مبتنی بر چیدمان بهینه پیشنهادی از نظر دقت زاویه یابی (بر اساس باند کرامر-راو) نیز بهتر از روش های دیگر بوده و خطای زاویه یابی آن کمتر است.

مراجعه

- [1] Schmidt, Ralph. "Multiple emitter location and signal parameter estimation." IEEE transactions on antennas and propagation 34.3 (1986): 276-280.
- [2] Linebarger, Darel A., Ivan Hal Sudborough, and Ioannis G. Tollis. "Difference bases and sparse sensor arrays." IEEE Transactions on information theory 39.2 (1993): 716-721.
- [3] Ruf, Christopher S. "Numerical annealing of low-redundancy linear arrays." IEEE Transactions on Antennas and Propagation 41.1 (1993): 85-90
- [4] Ishiguro, Masato. "Minimum redundancy linear arrays for a large number of antennas." Radio Science 15.6 (1980): 1163-1170.
- [5] Pearson, David, S. Unnikrishna Pillai, and Youngjik Lee. "An algorithm for near-optimal placement of sensor elements." IEEE Transactions on Information Theory 36.6 (1990): 1280-1284.
- [6] Ma, Wing-Kin, Tsung-Han Hsieh, and Chong-Yung Chi. "DOA estimation of quasi-stationary signals via Khatri-Rao subspace." 2009 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. IEEE, 2009.
- [7] Pal, Piya, and Palghat P. Vaidyanathan. "Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom." IEEE Transactions on Signal Processing 58.8 (2010): 4167-4181.



شکل ۳: مقایسه دقت جهت یابی به کمک آرایه های مختلف بر حسب نسبت SNR در شکل (۴) به ازای SNR=0dB دقت جهت یابی برای ساختارهای مختلف با ۱۰ حسگر در محدوده زاویه [-۴۰:۴۰] شبیه سازی شده است. نتایج شبیه سازی نشان می دهد چینش بهینه پیشنهادی از لحاظ دقت جهت یابی نسبت به سایر روشها عملکرد مناسب تری دارد. نکته قابل توجه آنست که آرایه بهینه در بدترین وضعیت از سایر چیدمان ها در بهترین وضعیت دقت بهتری دارد.



شکل ۴: مقایسه دقت جهت یابی به کمک آرایه های مختلف بر حسب زاویه ورود لازم به ذکر است که با روش جستجوی کامل نیز می توان چیدمان بهینه از نظر درجه آزادی را یافت اما روشن است که این جستجو از پیچیدگی محاسباتی بسیار برخوردار بوده و به زمان بسیار زیادی نیاز دارد. در یک مقایسه بین استخراج چینش بهینه به کمک جستجوی کامل فضا و استخراج به کمک حل مساله (۱۰) به ازای ۴۱ DOF= زمان حل مساله با سخت افزار یکسان به ترتیب ۱۵ و ۵. ثانیه بود. این نشان از حجم پایین تر محاسبات در روش پیشنهادی دارد. برای ۱۰۱ DOF پس از ۳۳۷ ثانیه به آرایه ای با ۲۰ حسگر می رسیدیم، در حالی که به روش جستجوی کل فضا سخت افزار بدلیل حجم

- [8] Vaidyanathan, Palghat P., and Piya Pal. "Sparse sensing with co-prime samplers and arrays." *IEEE Transactions on Signal Processing* 59.2 (2010): 573-586.
- [9] Qin, Si, Yimin D. Zhang, and Moeness G. Amin. "Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation." *IEEE Transactions on Signal Processing* 63.6 (2015): 1377-1390.
- [10] Yang, Minglei, et al. "A new array geometry for DOA estimation with enhanced degrees of freedom." 2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE, 2016.
- [11] Wang, Xiaomeng, and Xin Wang. "Hole Identification and Filling in k -Times Extended Co-Prime Arrays for Highly Efficient DOA Estimation." *IEEE Transactions on Signal Processing* 67.10 (2019): 2693-2706.
- [12] Moffet, Alan. "Minimum-redundancy linear arrays." *IEEE Transactions on antennas and propagation* 16.2 (1968): 172-175
- [13] Liu, Chun-Lin, and P. P. Vaidyanathan. "Cramér–Rao bounds for coprime and other sparse arrays, which find more sources than sensors." *Digital Signal Processing* 61 (2017): 43-61.
- [14] Shi, Zhiguo, et al. "Source estimation using coprime array: A sparse reconstruction perspective." *IEEE Sensors Journal* 17.3 (2016): 755-765.
- [15] Liu, Chun-Lin, and P. P. Vaidyanathan. "Super nested arrays: Linear sparse arrays with reduced mutual coupling—Part I: Fundamentals." *IEEE Transactions on Signal Processing* 64.15 (2016): 3997-4012.